



Instituto de Geociências

**PARÂMETROS DE TRANSFORMAÇÃO ENTRE O SISTEMA GEODÉSICO
DE REFERÊNCIA DA COMISSÃO DA CARTA GERAL DO BRASIL E O
SISTEMA DE REFERÊNCIA GEOCÊNTRICO PARA AS AMÉRICAS
(SIRGAS 2000)**

**PORTO ALEGRE
2013**

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS: MODELO DE TRANSFORMAÇÃO ISOGONAL (7 PARÂMETROS)

A transformação de parâmetros é uma das atividades mais utilizadas nas ciências geodésicas. Por meio dela é possível relacionar dois sistemas de referência para coordenadas.

Ela pode ser descrita por meio do seguinte modelo de transformação linear:

$$\mathbf{X}_{\text{Destino}} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}_{\text{Origem}} + \mathbf{T} \quad (1)$$

onde:

$\mathbf{X}_{\text{Destino}}$: são as coordenadas de destino

\mathbf{M} : é a matriz de transformação

$\mathbf{X}_{\text{Origem}}$: são as coordenadas de origem

\mathbf{T} : é o vetor de translação

O modelo (1) pode ser expandido para considerando um sistema de coordenadas tridimensionais, de forma que:

$$\mathbf{X}_{\text{Destino}} = \begin{bmatrix} X_D \\ Y_D \\ Z_D \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{X}_{\text{Origem}} = \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \\ Z_O \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{bmatrix} \quad (4)$$

A definição da matriz de transformação \mathbf{M} proporcionará o estabelecimento das características geométricas que a transformação de parâmetros proporcionará, sendo possíveis quatro efeitos: escala uniforme, escalas não uniformes, rotações, torções e reflexões. Considerando a transformação de 7 parâmetros, também denominada de transformação de Helmert ou Isogonal, tem-se a seguinte definição para a matriz de transformação:

$$\mathbf{M} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R} \quad (5)$$

onde: \mathbf{U} é uma matriz de escala uniforme, e,

\mathbf{R} é uma matriz de rotação 3D.

A matriz de escala uniforme pode ser simplificada da seguinte forma:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \mathbf{I} \quad (6)$$

A matriz de rotação depende da definição do sentido das rotações: se horária ou anti-horária e da ordem em que são aplicadas as rotações nos respectivos eixos XYZ. Considerando que na maioria das aplicações geodésicas a matriz de rotação utilizada é a horária, e que a ordem das rotações é definida aplicando-se primeiramente a rotação no eixo X, posteriormente no eixo Y, e por fim no eixo Z, tem-se:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_Z \cdot \mathbf{R}_Y \cdot \mathbf{R}_X = \mathbf{R}_{ZYX} \quad (7)$$

e por conseguinte:

$$\mathbf{R}_{ZYX} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_Z \cdot \cos \varepsilon_Y & \cos \varepsilon_Z \cdot \sin \varepsilon_Y \cdot \sin \varepsilon_X - \sin \varepsilon_Z \cdot \cos \varepsilon_X & \cos \varepsilon_Z \cdot \sin \varepsilon_Y \cdot \cos \varepsilon_X + \sin \varepsilon_Z \cdot \sin \varepsilon_X \\ \sin \varepsilon_Z \cdot \cos \varepsilon_Y & \sin \varepsilon_Z \cdot \sin \varepsilon_Y \cdot \sin \varepsilon_X + \cos \varepsilon_Z \cdot \cos \varepsilon_X & \sin \varepsilon_Z \cdot \sin \varepsilon_Y \cdot \cos \varepsilon_X - \cos \varepsilon_Z \cdot \sin \varepsilon_X \\ -\sin \varepsilon_Y & \cos \varepsilon_Y \cdot \sin \varepsilon_X & \cos \varepsilon_Y \cdot \cos \varepsilon_X \end{bmatrix} \quad (8)$$

onde: ε_Z ε_Y ε_X são as respectivas rotações em torno dos eixos Z Y e X.

Expandindo (5) com os valores estabelecidos em (6) e em (7), resulta em:

$$\mathbf{M} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R} = \lambda \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}_{ZYX} = \lambda \cdot \mathbf{R}_{ZYX} \quad (9)$$

Aplicando (2), (3), (4) e (9) em (1), tem-se o seguinte modelo:

$$\begin{bmatrix} X_D \\ Y_D \\ Z_D \end{bmatrix} = u \cdot \mathbf{R}_{ZYX} \cdot \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \\ Z_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_X \\ \Delta_Y \\ \Delta_Z \end{bmatrix} \quad (10)$$

onde: λ é o fator de escala uniforme;

\mathbf{R}_{ZYX} é a matriz de rotação;

X_D, Y_D, Z_D são as coordenadas do sistema referencial de destino;

X_O, Y_O, Z_O são as coordenadas do sistema referencial de origem; e

$\Delta_X, \Delta_Y, \Delta_Z$ são as translações entre os dois sistemas medidas no referencial de destino.

1.2 AJUSTAMENTO DOS PARÂMETROS

O modelo apresentado em (10) concebe variáveis que relacionam dois sistemas de referência, representados pelas coordenadas do sistema de destino X_D, Y_D, Z_D e as coordenadas do sistema de origem X_O, Y_O, Z_O . Os parâmetros que relacionam estes dois sistemas de referência são: o fator de escala uniforme λ ; as rotações $\varepsilon_X, \varepsilon_Y, \varepsilon_Z$ e as translações entre os sistemas de referência $\Delta_X, \Delta_Y, \Delta_Z$, nos respectivos eixos X, Y, Z .

Considerando o sistema de destino como as observações e o sistema de origem como referencial conhecido, o modelo funcional (10) pode ser considerado como sendo do tipo modelo estocástico paramétrico. Levando em consideração ainda que o sistema de origem possa ter coordenadas conhecidas com suas respectivas precisões, pode-se então considerar as coordenadas do sistema de origem como incógnitas com injunções de peso, e assim, ter como modelo estocástico para o processo de estimativa de parâmetros pelo MMQ (Método dos Mínimos Quadrados) o Método Paramétrico com Injunções de Peso.

Seja k o número de pontos observados com seu homólogo conhecido no sistema tomado como referência, neste processo de estimativa de parâmetros $u = 7 + 3 \cdot k$ é definido como o número de incógnitas; $n = 3 \cdot k$ é o número de equações de observação; n_x o número de injunções.

2 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DE TRANSFORMAÇÃO ENTRE O SISTEMA CARTA GERAL E SIRGAS

2.1 AJUSTAMENTO DOS PARÂMETROS

Para esta determinação, foram tomados 150 pinos de referência da Prefeitura Municipal de Porto Alegre (PMPA), que possuem coordenadas conhecidas no referencial CARTA GERAL – GAUSS KRÜGER (CGGK) (origem) e foram medidos seus homólogos no sistema de referência SIRGAS por rastreamento GNSS (Sistema de Navegação Global por Satélite), considerados como observações (destino).

Como as coordenadas dos pinos da PMPA só possuem como conhecidos seus componentes planimétricos, o componente altimétrico foi considerado como o mesmo determinado no processo de medição dos pinos no referencial SIRGAS. A altitude ortométrica H de cada ponto foi definida considerando a altitude geométrica medida corrigida da ondulação geoidal do marco mais próximo da rede geodésica da PMPA.

De posse das coordenadas ENH (*Este – Oeste, Norte e Altitude Ortométrica*) foram computadas as coordenadas cartesianas dos pinos no sistema de origem CGGK. O processo de medição dos pinos no referencial SIRGAS usando rastreamento GNSS, por natureza do sistema, gerou diretamente as coordenadas medidas no sistema cartesiano.

Assim, de posse de ambas as coordenadas, conhecidas e medidas, no sistema cartesiano, foi realizado um processo de ajustamento de parâmetros pelo MMQ considerando o modelo estocástico Paramétrico com Injunções de Peso para as coordenadas conhecidas.

Foram implementadas rotinas de programação C/C++ para o processamento do processo de estimativa dos 7 parâmetros de transformação entre o sistema CG (Gauss Krüger) e o sistema SIRGAS.

2.2 RESULTADOS

Durante o processo de estimativa de parâmetros foi observado que alguns dos pinos conhecidos no sistema CGGK estavam com degradação de seu valor de coordenadas e foram retirados do processo; ao todos 124 pontos foram considerados no procedimento de determinação. Também não foi possível determinar a qualidade posicional das coordenadas dos pinos, o que levou a considerar os pesos das injunções destas coordenadas como unitários para todas elas, considerando todas como de mesma precisão.

O primeiro dos resultados obtidos teve como premissa a consideração dos 7 parâmetros como incógnitos, ou seja, peso da injunção como zero. Desta forma, o resultado obtido é o descrito no quadro abaixo:

Quadro 1 – Parâmetros de transformação CG-SIRGAS considerando 7 parâmetros

RESUMO DO CÁLCULO DA TRANSFORMAÇÃO ISOGONAL:			
Fator de escala	=	1.0000039561 unidade	+ - 2.093E-06
Translações:			
Xo	=	-250.1299890990 unidade	+ - 0.017
Yo	=	196.3392596860 unidade	+ - 0.017
Zo	=	-40.5195719703 unidade	+ - 0.017
Direção das rotações	=	HORÁRIA	
Ângulos de rotação - Graus radianos (rad):			
Omega	=	0.00001457 rad	+ - 0.0000025 rad
Phi	=	-0.00002432 rad	+ - 0.0000027 rad
Kappa	=	-0.00000420 rad	+ - 0.0000035 rad
Ângulos de rotação - Graus decimais (°):			
Omega	=	0.00083468 °	+ - 0.0001422 °
Phi	=	-0.00139355 °	+ - 0.0001528 °
Kappa	=	-0.00024041 °	+ - 0.0001984 °
Ângulos de rotação - GMS:			
Omega	=	+00°00'03.004"	+ - +00°00'00.511"
Phi	=	-00°00'05.016"	+ - +00°00'00.549"
Kappa	=	-00°00'00.865"	+ - +00°00'00.714"

Observado este primeiro resultado verificou-se que as rotações entre os sistemas de referência CG-SIRGAS são de grandezas menores que 1 segundo de arco. Também observou-se que o fator de escala é próximo do valor unitário. Com isso verificou-se a possibilidade de considerar as rotações fixas como nulas no processo de ajustamento e o fator de escala como unitário. Com isto, chegou-se aos resultados descritos no Quadro 2.

Quadro 2 – Parâmetros de transformação CG-SIRGAS considerando parâmetros

RESUMO DO CÁLCULO DA TRANSFORMAÇÃO ISOGONAL:			
Fator de escala	=	1.0000000000 unidade	+ - 0.000E+00
Translações:			
Xo	=	-177.1851478228 unidade	+ - 0.021
Yo	=	211.0832946773 unidade	+ - 0.021
Zo	=	-31.5581677418 unidade	+ - 0.021
Direção das rotações	=	HORÁRIA	
Ângulos de rotação - Graus radianos (rad):			
Omega	=	0.00000000 rad	+ - 0.000E+00 rad
Phi	=	-0.00000000 rad	+ - 0.000E+00 rad
Kappa	=	-0.00000000 rad	+ - 0.000E+00 rad
Ângulos de rotação - Graus decimais (°):			
Omega	=	0.00000000 °	+ - 0.000E+00 °
Phi	=	-0.00000000 °	+ - 0.000E+00 °
Kappa	=	-0.00000000 °	+ - 0.000E+00 °
Ângulos de rotação - GMS:			
Omega	=	+00°00'00.000"	+ - +00°00'00.000"
Phi	=	+00°00'00.000"	+ - +00°00'00.000"
Kappa	=	+00°00'00.000"	+ - +00°00'00.000"

2.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para a análise dos resultados do processo de determinação dos parâmetros de transformação CG-SIRGAS foram medidos 50 pinos para a verificação no sistema SIRGAS. Estes mesmo pinos possuem coordenadas conhecidas no sistema CGGK, sendo eles transformados usando os parâmetros determinados. De posse das coordenadas transformadas e medidas destes pontos foi feita a comparação das discrepâncias entre eles. Durante o processo de análise foi observado que alguns dos pinos conhecidos no sistema CGGK estavam com degradação de seu valor de coordenadas e foram retirados do processo. Ao todo, 42 pontos foram considerados no procedimento de análise. Na análise foram considerados testes de tendência e exatidão, para um nível de significância $\alpha = 5\%$ para 41 graus de liberdade.

O primeiro teste de análise considerou o conjunto de dados apresentado no Quadro 1.

Quadro 3 – Análise de tendência considerando o conjunto de parâmetros do Quadro 1

ANÁLISE DE TENDÊNCIA DAS DISCREPÂNCIAS:		
T-STUDENT TEÓRICO:		

T-Student(41, 0.05): 1.812		
T-STUDENT AMOSTRAIS:		

X:	Y:	Z:
0.598	0.335	0.292
não-tendencioso	não-tendencioso	não-
tendencioso		
P: 72.329%	P: 63.021%	P:
61.400%		

Quadro 4 – Análise de Exatidão considerando o conjunto de parâmetros do Quadro 1

ANÁLISE DE EXATIDÃO:		
Exatidão a priori esperada para as coordenadas: 0.360 m		
Q-QUADRADO TEÓRICO		

Q-Quadrado(41, 0.05): 18.307		
Q-QUADRADOS AMOSTRAIS:		

X:	Y:	Z:
17.859	7.225	8.076
Aprovado		Aprovado
Aprovado		
EXATIDÃO ALCANÇADA PARA AS COORDENADAS:		

X:	Y:	Z:
0.306 m	0.195 m	0.206
m		
EXATIDÃO ALCANÇADA PARA A RESULTANTE :		
EXATIDÃO ALCANÇADA PARA A RESULTANTE : 41,72 cm		

O segundo teste de análise considerou o conjunto de dados apresentado no Quadro 2.

Quadro 5 – Análise de tendência considerando o conjunto de parâmetros do Quadro 1

ANÁLISE DE TENDÊNCIA DAS DISCREPÂNCIAS:		
T-STUDENT TEÓRICO:		

T-Student(41, 0.05): 1.812		
T-STUDENT AMOSTRAIS:		

X:	Y:	Z:
0.613	1.464	1.320
não-tendencioso	não-tendencioso	não-
tendencioso		
P: 72.821%	P: 92.462%	P:
90.285%		

Quadro 6 – Análise de Exatidão considerando o conjunto de parâmetros do Quadro 1

ANÁLISE DE EXATIDÃO:		
Exatidão a priori esperada para as coordenadas: 0.360 m		
Q-QUADRADO TEÓRICO		

Q-Quadrado(41, 0.05): 18.307		
Q-QUADRADOS AMOSTRAIS:		

X:	Y:	Z:
17.389	5.734	19.117
Aprovado		Aprovado
Aprovado		
EXATIDÃO ALCANÇADA PARA AS COORDENADAS:		

X:	Y:	Z:
0.341 m	0.196 m	0.358
m		
EXATIDÃO ALCANÇADA PARA A RESULTANTE : 53,18 cm		

Como se pode observar, todos os experimentos foram aprovados no teste de tendência e exatidão para o nível de significância considerado.

No teste de exatidão, considerando o conjunto de parâmetros do Quadro 1, todas as coordenadas apresentaram uma exatidão melhor que 31 cm. No Quadro 2 esse valor sobe ligeiramente para 36 cm. Em termos de resultante tem-se um decréscimo de exatidão de 53,18 cm para 41,72 cm.

3 CONCLUSÕES

Pelo texto apresentado fica evidenciado que o procedimento de determinação de parâmetros de transformação entre o sistema de referência GK utilizado pela PMPA para SIRGAS foi concluído com êxito.

A exatidão desta transformação, para a resultante das coordenadas, ficou abaixo de 53,18 cm, considerando os 7 parâmetros de transformação considerados como livres, e 41,72 cm, considerando as translações livres, fator de escala unitário e rotações nulas.

Do ponto de vista prático, para a comunidade de usuários o uso dos parâmetros do Quadro 2 tem mais facilidade de assimilação do que o uso dos parâmetros do Quadro 1. Por outro lado, para usuários especializados os 7 parâmetros calculados como livres causa minimesa a perda de qualidade em cerca de 11 centímetros.

Vale resaltar que a transformação não proporciona resultados de saída melhores que os dados de entrada, pelo contrário, os dados de saída sempre serão piores que os dados de entrada aos níveis de exatidão apresentados nos quadros 4 e 6 para um cenário de pior caso.

Contudo os parâmetros determinados serão sempre uma excelente alternativa para a compatibilização de mapas antigos em GK para SIRGAS compatíveis com escalas menores que 1/1500.

Comissão Coordenadora:

Profa. Andrea Lopes Iescheck
Prof. Mário Luiz Lopes Reiss
Prof. Ronaldo dos Santos da Rocha
